www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

Toutes les fonctions utilisées dans ce problème sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

Les trois questions de la partie 1 sont indépendantes les unes des autres, mais leurs résultats sont utilisés dans la partie 2.

On notera C_n^k les coefficients du binôme de Newton.

(C_n^k désigne le nombre des parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.)

PARTIE 1

1.1. n étant un entier positif ou nul, on définit I_n par : $\quad I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$.

a. Calculer I_n au moyen de la formule du binôme.

b. Trouver une relation liant I_n et I_{n-1} (pour $n \geqslant 1$).

c. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

1.2. Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, +\infty[$.

a. Montrer que si $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Que peut-on déduire de l'hypothèse $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$?

1.3. Soit $a \in \mathbb{R}$, et soient f, g deux applications continues de $]a, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, telles que :

- $\forall x \in]a, +\infty[, \quad f(x) > 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$
- l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ diverge.

Prouver que : $\quad \lim_{X \to +\infty} \left(\frac{\int_a^X g(x) \, dx}{\int_a^X f(x) \, dx} \right) = 0$.

PARTIE 2

2.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $F(x)$ par : $\quad F(x) = \int_0^x \exp(t^2) \, dt$.

On ne cherchera pas à exprimer F à l'aide des fonctions usuelles.

a. Prouver que F est impaire.

b. Prouver que F est développable en série entière. Donner les valeurs des coefficients de ce développement, et déterminer son rayon de convergence.

2.2. On définit la fonction numérique h par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \exp(-x^2) \cdot F(x)$.

Tournez la page S.V.P.

a. Prouver que h est développable en série entière, et préciser sur quel domaine. On posera :

$$h(x) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n x^n .$$

b. Prouver que h est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 1$$

et en déduire des expressions des coefficients a_n.

c. Retrouver le résultat obtenu en effectuant le produit des développements de $\exp(-x^2)$ et de $F(x)$.

2.3. **Étude des variations de h.**

a. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Prouver que, lorsque $x \to +\infty$, l'on a : $F(x) \sim \dfrac{\exp(x^2)}{2x}$

(*Indication :* effectuer une intégration par parties sur $F(x) - F(1) = \displaystyle\int_1^x \exp(t^2)\,dt$, et utiliser 1.3.)

En déduire $\lim_{x \to +\infty} h(x)$, ainsi que la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$.

b. Calculer $h'(x)$.

Pour $x \neq 0$, on pose $h'(x) = x \exp(-x^2) \cdot u(x)$.

Calculer $u(x)$ et $u'(x)$, étudier les variations de u sur $]0, +\infty[$, discuter le signe de u, et en déduire le tableau des variations de h sur $]0, +\infty[$. On ne cherchera pas, dans cette question, à déterminer la valeur x_0 telle que $h(x_0) = \sup_{x \in]0, +\infty[} h(x)$.

2.4. *a.* En calculant les premiers termes du développement obtenu en 2.1.*b.*, déterminer le signe de $u(1)$.

b. Prouver que, pour tout $x > 0$, $0 < h(x) < x$.

En déduire, à l'aide de 2.2.*b.*, que : $x \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow h'(x) > 0$.

c. Quel encadrement obtient-on pour x_0 ?

2.5. *a.* Calculer $h''(x)$.

b. Prouver que : $x \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow h''(x) < 0$.

c. On suppose $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et on définit $v(x)$ par :

$$h''(x) = 2(2x^2 - 1) \cdot \exp(-x^2) \cdot v(x).$$

Calculer $v(x)$ et $v'(x)$; déterminer les limites de v en $+\infty$ et en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

En déduire que l'équation $v(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, une unique solution que l'on désignera par x_1.

2.6. *a.* En calculant les premiers termes du développement obtenu en 2.1.*b.*, déterminer le signe de $v(1,6)$.

b. Prouver que $v(1) < 0$.

En déduire un encadrement de x_1.

2.7. Donner un tracé approximatif du graphe de h utilisant les résultats obtenus ci-dessus.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail